$K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E K-ev de dim. finie n (3). $f\in L(E)$.

I. Valeurs propres: définition, recherche.

A. Définition. (Monier MP p.42)

Def 1: Soit $\lambda\in K$. On dit que λ est une **valeur propre** de f ssi: $\exists x\in E$, $(x\neq 0$ et $f(x)=\lambda x)$. (1)
x est alors appelé **vecteur propre** de f associé à λ.
On appelle **Spectre** de f, et on note Sp(f) l'ensemble des valeurs propres de f.
$E_\lambda=Ker(f-\lambda Id_E)$ est le sous-espace propre associé à λ (2)

Remarque: (3) Soit A=Mat(f) dans une base de E, les valeurs propres et vecteurs propres de A sont ceux de f.

Prop 1: Soient $\lambda_1, \lambda_2,\dots\lambda_N$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes. Les $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2},\dots E_{\lambda_N}$ sont en **somme directe**.

B. Recherche.

Valeurs propres "évidentes": Si la forme matricielle de f est une matrice triangulaire (a fortiori diagonale), ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

a) Polynôme caractéristique (Monier).

Def 2: L'application de K dans K: $\lambda\mapsto\det(f-\lambda I_n)$, est un polynôme appelé **polynôme caractéristique** de f et noté χ_f (ou de A, noté χ_A).

Prop 2: $Sp_K(f)=\chi_f^{-1}(\{0\})$, i.e. les **zéros** du polynôme caractéritique sont les **valeurs propres** de f.

Exemple 1: (Monier) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de f dont la matrice est: . $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}$

Prop 3: $0\le$ dim. de $E_\lambda\le$ multiplicité de λ dans χ_f.

Remarque: (Sorosina p240)
Si n=2, $\chi_A(X)=X^2-tr(A)X+\det(A)$
Si n=3, $\chi_A(X)=-X^3+tr(A)X^2-tr(com(A))X+\det(A)$

b) Polynôme annulateur.

Def 3: Soit $P\in K[X]$. P est dit **polynôme annulateur** de f ssi P(f)=0. (4)
$f\in L(E)$ admet au moins un polynôme annulateur autre que 0.

Prop 4: Si $\lambda\in Sp(f)$, $x\in E_\lambda$: $\forall P\in K[X]$, $(P(f))(x)=P(\lambda)x$.

Cor: Si P est un polynôme annulateur de f, alors $Sp(f)\subset P^{-1}(\{0\})$. *Les val. ppes de f st racines de P.*

Une relation liant les puissances de A (ou de f), avec $A^0=Id$, donne un polynôme annulateur.
Exemple 2: (Sorosina ex.9.2 p.243) Valeurs propres de: $f: A\mapsto {}^tA$. Le polynôme $X^2-1=(X+1)(X-1)$ est annulateur, les valeurs propres sont 1 et -1.

c) Polynôme minimal (Grifone p.183).

Def 4: On appelle **polynôme minimal** de f, et on note $m_f(X)$ le polynôme annumateur de f de degré le plus petit.

Prop 5: Les polynômes annulateurs de f sont du type: $Q(X)=A(X)m_f(X)$, avec $A\in K[X]$. (5).

Prop 6: Les **zéros** de m_f sont les mêmes que celles de χ_f, i.e. **les valeurs propres de f**, avec une multiplicité en générale inférieure.
Si $\chi_f(X)=(-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\dots(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$,
alors $m_f(X)=(X-\lambda_1)^{\beta_1}\dots(X-\lambda_p)^{\beta_p}$, $1\le\beta_i\le\alpha_i$.

Exemple 3: (Grifone) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\chi_f(X)=-(X-1)(X+2)^2$, $m_f(X)=(X-1)(X+2)$.

d) Rang, trace, det, A^p. (Sorosina 9.3 p.241)

- Si $A\in M_n(K)$ et $rang(A)=r<n$, alors 0 est valeur propre de A de multiplicité n-r.
- Si $A\in M_n(K)$ admet n valeurs propres $\lambda_1,\dots\lambda_n$ dans K, alors : $tr(A)=\sum_{i=1}^n\lambda_i$, et $\det(A)=\prod_{i=1}^n\lambda_i$.

(où $\lambda_1,\dots\lambda_n$ sont les racines simples de χ_f, non nécess[t] distinctes. Par ex. si A est une matrice $\mathbb{R}$, on prend les racines $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de χ_f, égales ou distinctes.)

- Soient $A\in M_n(K)$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Les valeurs propres de A^k sont exactement les puissances k[èmes] des valeurs propres de A.

Exemple 4: (Sorosina ex.9.3 p.243) Soient $\alpha_1,\dots\alpha_n$ n nombres réels. Déterminer les valeurs propres de:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

II. Utilisation.

A. Réduction des endomorphismes.

a) Diagonalisation (Monier p.52).

Def 5: f est **diagonalisable** ssi $\exists B$ base de E tq $Mat_B(f)$ soit diagonale.

Prop 7: Les propositions suivantes sont équivalentes:
(i) f est diagonalisable
(ii) Il existe une base de E formée de vect. ppes de f
(iii) La somme des E_λ de f est égale à E
(iv) La somme des dimensions des E_λ est égale à dimE.
(v) χ_f est scindé sur K, et $\forall\lambda\in Sp(f)$, $\dim(E_\lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ dans χ_f.

Prop 8: f admet n val. ppes distinctes ⇒ f diagonalisable

Exemple 5: (Monier p.55). $Mat(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Applications: (Monier p.68...) Calcul des A^p (d'où l'exponentielle de matrices), suites récurrentes linéaires à coefs constants, résolution d'équations différentielles (Leçon 225).

Exemple 6:(M4 p.199) $\begin{cases} x' = 3x - 2y - 4z + te^t - t \\ y' = -2x + 3y + 2z + te^t - 2t + 2 \\ z' = 3x - 3y - 4z - 1 \end{cases}$

A est diagonalisable, et notant $A=PDP^{-1}$, on fera le changement de variable $Y=P^{-1}X$ qui nous ramène à des équa diffs scalaires 1er ordre.

Le calcul de P^{-1} est nécessaire – Monier 4 d'ANALYSE!

b) Trigonalisation (monier p.76)

Def 6: f est **trigonalisable** ssi ∃B base de E tq $Mat_B(f)$ soit triangulaire.

Prop 8: Les propositions suivantes sont équivalentes:
(i) f est trigonalisable
(ii) χ_f est scindé sur K. (tjrs vrai ds ℂ alébriq[t] clos).

B. Matrice symétrique (leçon 120).

Def 1: Soit f∈L(E). On dit que f est **symétrique** ssi:
$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
On note **S(E)** l'ensemble des edomph. symétriques de E.

Prop 9: Soients $(E,\langle .,.\rangle)$ un ev eucl., et $f \in S(E)$.
1) f est **diagonalisable.**
2) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. En particulier, on peut construire une **BON de vecteurs propres** en choisissant une BON dans chaque espace propre.

Applications:
Caractérisation du pdt scalaire à l'aide de sa matrice:
Soient s une f.b.s. sur E, S sa matrice ds une base de E. Alors s définit un pdt scal. ssi S a ttes ses val. ppes >0.
S_n^+: mat. positives de $S_n(\mathbb{R})$, S_n^{++}: def.posde $S_n(\mathbb{R})$ (Grifone p.250)↑

Classification des quadriques (6): L'étude d'une quadrique à centre amène une matrice symétrique réelle, que l'on diagonalise grâce au th. fondamental. (Monier géométrie p.285).

C. Classification des endomph orthog. (117)

Etude des valeurs propres de Mat(f), racines de son polynôme caractéristique, pour obtenir par exemple la classification suivante en dimension 3:

Prop 10: (Mercier p.152): **Classification par invariants:**
Soit $f \in O(E)$
dim Invf = 3 ⇔ f = Id
dim Invf = 2 ⇔ f = S_P
dim Invf = 1 ⇔ f = R_D
dim Invf = 0 ⇔ f = $R_D \circ S_{D^\perp}$

III. Notes.

(1) (Sorosina p.239) Une matrice (ou un endomorphisme en dim. finie) n'admet pas toujours de valeurs propres. Contre-ex. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de poly caract X^2+1 sans racines ℝ, ou encore A rotation d'angle π/2, dons aucune droite de $\mathbb{R}^2$ n'est stable par A

(2) E_λ , sous-espace propre associé à λ, est formé des vecteurs propres de λ, et de 0 (un vect. ppe n'est par déf° jamais nul).

(3) Vrai seulement en dimension finie (sinon, la notion de matrice n'a pas de sens).

(4) Applications:
f projecteur ⇔ X^2-X est annulateur de f.
f symétrie ⇔ X^2-1 est annulateur de f.

(5) Par division d'un polynôme annulateur qcq par m_f.

(6) **Quadrique**: tte surface d'équation cartésienne $F(x,y,z)=0$, où F est un polynôme de degré total 2.